Задачи ЕГЭ с решениями по теории вероятности

Задача. В классе 21 шестиклассник, среди них два друга - Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Митя и Петя окажутся в одной и той же группе.

Решение:

Нам потребуется много ознакомительной теории, решение ниже.

1) Вероятность события А - это отношение числа исходов, благоприятствующих его наступлению к числу всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных). <u>*P(A)= m/n,*</u> *где m - число благоприятных исходов, а n - число всех исходов.*

2) Несовместные события - события, которые не наступают в одном и том же испытании.

3) Суммой событий А и В называется событие <u>*С = А+В*</u>*, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий А или В.*

4) Теорема: Вероятность суммы несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий <u>*P(A+B) = P(A)+P(B).*</u>

5) Два события А и В называются независимыми, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, проявилось другое событие или нет. в противном случае они зависимые.

6) Условная вероятность: Пусть А и В - зависимые события. Условной вероятностью $P_A(B)$ события В называется вероятность события В, найденная в предположении, что событие А уже наступило.

7) Теорема: Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило: <u>*$P(A*B) = P(A) * P_A(B)$.*</u>

РЕШЕНИЕ

Нас устроит, если Митя и Петя окажутся в любой из трех групп.

Допустим, событие А - оба попали в 1-ю группу

событие В - оба попали во 2-ю группу

событие С - оба попали в 3-ю группу.

Эти события несовместны по определению №2 и любое из них нас устроит. Используем теорему №4 и найдем P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C).

В свою очередь событие А состоит из двух зависимых событий:

A_1 - что Митя окажется в 1-ой группе

A_2 - что Петя окажется в 1-ой группе, ⇔ теорема №3: $P(A) = P(A_1)*P_{A1}(A_2)$.

По определению № 1 находим вероятность, что Митя попадет в 1-ю группу $P(A_1)$: m=1, так как один благоприятный исход, а n=3, так как всего возможно три исхода. Поэтому $P(A_1) = 1/3$.

Теперь найдем $P_{A1}(A_2)$ то есть условную вероятность того, что Петя попадет в 1-ю группу при условии, что Митя в нее уже попал.

Заметим, что число благоприятных условий равно 6, так как одно место в группе уже занято Митей (то есть нас устраивает, если Петя попадет в любое из шести свободных мест в группе и m=6), а общее число всех исходов = 20, так как Митя уже не участвует в выборке (то есть всего претендентов осталось 20 человек и n=20).

Поэтому $P_{A1}(A_2) = 6/20 = 3/10$

Таким образом $P(A) = 1/3 * 3/10 = 1/10$.

Аналогично рассуждая, найдем $P(B) = 1/10$ и $P(C) = 1/10$.

Поэтому $P(A+B+C) = 1/10 + 1/10 + 1/10 = 3/10 = 0,3$ (по теореме №4).

Ответ: 0,3.

Задача. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (одним из выстрелов).

Решение:

По условию задачи нас устроит, если произойдет одно из двух несовместных событий:

А - стрелок попадает с 1 раза

В - стрелок попадает со 2 выстрела, а первый выстрел мимо цели.

События А и В несовместны. Напомним некоторые определения:

2) Несовместные события - события, которые не наступают в одном и том же испытании.

3) Суммой событий A и B называется событие <u>C = A+B</u>, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B.
4) Теорема: Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий <u>P(A+B) = P(A)+P(B).</u>
Значит, P(A+B) = P(A) + P(B), где P(A) = 0,6 по условию. Найдем P(B).

Напомним некоторые определения:

5) Два события A и B называются независимыми, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, проявилось другое событие или нет. в противном случае они зависимые.
8) Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.
9) Два события называются противоположными, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит: <u>P(A) + P(Á) = 1.</u>
Значит, в этой задаче P(Á) = 1 - P(A) = 1 - 0,6= 0,4 - вероятность того, что в первый раз стрелок промахнется.

*10) Произведением событий Á и C называется событие B=Á*C, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие Á и событие C.*

Заметим, что вероятность события C, что стрелок попадет в цель 2-й раз равна 0,6 (так как она не зависит, первый раз стрелок стреляет или второй), то есть P(C) = 0,6.

Таким образом, получим P(B) = P(Á*C) = 0,4*0,6 = 0,24.

Значит, P(A+B) = 0,6+0,24 = 0,84.

Ответ: 0,84.

Задача.

Два завода выпускают одинаковые автомобильные предохранители. Первый завод выпускает 40% предохранителей, второй - 60%. Первый завод выпускает 4% бракованных предохранителей, а второй - 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Решение:

По условию задачи первый завод выпускает 40% предохранителей из 100%. Другими словами он выпускает 40/100 = 4/10 доли от общего производства двух заводов. Второй завод аналогично выпускает 60% = 60/100 = 6/10 доли от общего числа деталей.

Среди этих 4/10 по условию 4% брака, что значит 4/100 от 4/10, это равно: 4/100 * 4/10 = 16/1000. То есть от всего объема выпущенных деталей 16/1000 бракованных выпускает первый завод.

Аналогично найдем долю брака со второго завода: 3/100 * 6/10 = 18/1000.

Всего бракованных деталей с обоих заводов будет: 16/1000 + 18/1000 = 34/1000 = 0,034. Это и будет равно вероятности того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Ответ: 0,34.

Задача. Две фабрики выпускают одинаковые лампочки. Первая фабрика выпускает 60% лампочек, вторая - 40%. Среди продукции первой фабрики 3% лампочек дефектные, среди продукции второй фабрики - 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине лампочка окажется дефектной.

Решение:

По условию задачи первая фабрика выпускает 60% лампочек из 100%. Другими словами она выпускает 60/100 = 6/10 доли от общего производства двух фабрик. Вторая фабрика аналогично выпускает 40% = 40/100 = 4/10 доли от общего числа лампочек.

Среди этих 6/10 по условию 3% брака, что значит 3/100 от 6/10, это равно: 3/100 * 6/10 = 18/1000. То есть от всего объема выпущенных лампочек 18/1000 окажутся дефектными с первой фабрики.

Аналогично найдем долю дефектных лампочек со второй фабрики: 2/100 * 4/10 = 8/1000.

Всего бракованных лампочек с обеих фабрик будет: 18/1000 + 8/1000 = 26/1000 = 0,026. Это и будет равно вероятности того, что случайно выбранная в магазине лампочка окажется дефектной.

Ответ: 0,026.